# LOGICA E TEORIA DEGLI INSIEMI

## VOCABOLARIO

PROPOSIZIONE → frase di senso compiuto di cui si possa valutare la verità o la falsità.

↓ composta almeno da soggetto e predicato.

P, Q, R

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

Date due proposizioni se ne possono costruire di nuove mediante i CONNETTIVI LOGICI:

→ P e Q ⇒ $P \wedge Q$ (congiunzione)

↓ è vera se sono veri sia P che Q contemporaneamente

→ P o Q ⇒ $P \vee Q$ (DISGIUNZIONE)

↓ è vera se è vera P oppure se è vera Q

BINARI ↓ legano 2 oggetti ↓ 3+2, 3-2, 3=2, 4<2, 3>2

→ non P ⇒ $\neg P$ (NEGAZIONE)

↓ nega la proposizione; è la negazione di P

P è vera se e ↓ solo se $\neg P$ è falsa; $\neg P$ è vera se e solo se P è falsa.

$\neg(\neg P) \iff P$ : doppia negazione = affermazione.

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

Quando due proposizioni, pur formalmente diverse, esprimono la stessa affermazione, si dicono tra loro **EQUIVALENTI** e l'una può essere sostituita dall'altra dove sia necessario.

$$P \iff Q$$

→ $P \wedge Q \iff Q \wedge P$

→ $P \vee Q \iff Q \vee P$

→ proprietà commutativa

→ $(P \wedge Q) \wedge R \iff P \wedge (Q \wedge R)$

→ $(P \vee Q) \vee R \iff P \vee (Q \vee R)$

→ proprietà associativa

→ $\neg(\neg P) \iff P$ → doppia negazione

→ $\neg(P \wedge Q) \iff \neg P \vee \neg Q$ (I)

→ $\neg(P \vee Q) \iff \neg P \wedge \neg Q$ (II)

→ leggi di De Morgan

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

Es.

P: $m$ è divisibile per 2

Q: $m$ è divisibile per 3

$P \wedge Q$: $m$ è divisibile per 2 e per 3 (cioè per 6)

$\neg(P \wedge Q)$: $m$ non è divisibile per 6

⇕ SONO EQUIVALENTI

$\neg P \vee \neg Q$: $m$ non è divisibile per 2 oppure $m$ non è divisibile per 3

→ $P \wedge (Q \vee R) \iff (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ → proprietà distributiva di $\wedge$ rispetto a $\vee$

→ $P \vee (Q \wedge R) \iff (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ → proprietà distributiva di $\vee$ rispetto a $\wedge$

## IMPLICAZIONI → "se" ... "allora"

$P \Rightarrow Q$ → se vale P allora vale Q

↓

→ se P allora Q

→ da P segue Q

→ vale Q se vale P

→ P è condizione sufficiente per Q → basta sapere che P è vera per dedurre che anche Q lo è.

→ Q è condizione necessaria per P → se Q fosse falsa, allora anche P lo sarebbe, cioè perché possa essere vera P deve preliminarmente essere vera Q (anche se questo non assicura la verità di P).

Per la definizione dell'implicazione logica $P \Rightarrow Q$, assumiamo che sia falsa solo quando P è vera e Q è falsa.

⇓

Riteniamo falso ogni ragionamento che partendo da un enunciato vero arrivi ad una conseguenza falsa:

↓

$$\neg(P \Rightarrow Q) \Longleftrightarrow (P \wedge \neg Q)$$

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

Da ciò segue:

$$(P \Rightarrow Q) \Longleftrightarrow \neg(P \wedge \neg Q)$$

$$\Longleftrightarrow \neg P \vee \neg(\neg Q) \qquad \text{De Morgan}$$

$$\Longleftrightarrow \neg P \vee Q \qquad \text{doppia negazione}$$

L'implicazione $P \Rightarrow Q$ è vera se → P e Q sono entrambe vere, oppure → P è falsa.

$$(P \Rightarrow Q) \Longleftrightarrow (\neg P \vee Q)$$

$$\neg(\neg P \vee Q) \overset{\text{(De Morgan)}}{\Longleftrightarrow} \neg(\neg P) \wedge \neg Q \Longleftrightarrow P \wedge \neg Q$$

$P \Rightarrow Q$ è falso quando vale P e non vale Q.

↓

$P \not\Rightarrow Q$

Es. $2>3 \Rightarrow 3>4$ è <u>VERA</u>

⇕

$2+1>3+1 \Longleftrightarrow 3>4$

## DOPPIA IMPLICAZIONE → "... se e solo se..."

$$P \Rightarrow Q \iff (\neg P \vee Q)$$

↓ "equivale a"

Dire che P è vera se e solo se è vera Q si scrive $P \iff Q$

Si può anche esprimere la stessa cosa con "condizione necessaria e sufficiente perché valga P è che valga Q" oppure "P equivale a Q".

↓

quando valgono contemporaneamente le implicazioni $P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow P$:

⇓

$$(\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)$$

↓

$$[(\neg P) \wedge (\neg Q \vee P)] \vee \{Q \wedge [(\neg Q) \wedge P]\}$$ proprietà distributiva

$$[(\neg P) \wedge \neg Q] \vee \underbrace{(\neg P \wedge P)} \vee [\underbrace{(P \wedge Q) \vee (\neg Q \wedge Q)}]$$

non sono mai vere, quindi:

$P \iff Q$ EQUIVALE A $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

↓

$P \iff Q$ vuol dire $[P \Rightarrow Q] \wedge [Q \Rightarrow P]$

Es.

P : $n^2$ è pari

Q : $n$ è pari

TEOREMA: $n^2$ è pari se e solo se $n$ è pari : $P \iff Q$

→ $P \Rightarrow Q$

→ $Q \Rightarrow P$

- $P \Rightarrow Q$

$n^2$ pari ⇒ $n$ pari

Dimostrazione $P \Rightarrow Q$

Ip: $n^2$ pari

Tesi: $n$ pari

$$n^2 = n^2 - 1 + 1 = (n^2 - 1) + 1 = (n-1)(n+1) + 1 = K$$

Per ipotesi $K$ è pari, quindi

$$(n-1)(n+1) = K-1$$

$K-1$ è dispari.

Quindi $(n-1)(n+1)$ è dispari, quindi $(n-1)$ è dispari e $(n+1)$ è dispari:

$(n-1) \wedge (n+1)$ sono dispari

$\Downarrow$

allora $n$ è pari

- $Q \Rightarrow P$

Dimostrazione $Q \Rightarrow P$

Ip: Q: $n$ è pari

Tesi: P: $n^2$ è pari

$n$ pari $\Rightarrow n = 2K$

Elevo tutto al quadrato:

$$n^2 = 4K^2 = \underbrace{2 \cdot 2K^2}$$

$\downarrow$

PARI

$\downarrow$

$n^2$ è pari

MASTER COPY

Tel. 388/9837745